1. На доске написано число. Олег играет в арифметическую игру: он может либо стереть последнюю цифру написанного числа, либо прибавить к написанному числу число 2018 и записать полученный результат, стерев предыдущее число. Может ли Олег, действуя таким образом, в конце концов получить число 1? Если да, покажите как; если нет, объясните почему.

2. Друзья Алеша, Боря и Витя учатся в одном классе. Один из них ездит домой от школы на автобусе, другой — на трамвае, а третий — на троллейбусе. Однажды после уроков Алёша пошёл проводить своего друга до остановки автобуса. Когда мимо них проходил троллейбус, третий друг крикнул из окна: «Боря, ты забыл в школе тетрадку!» Кто на чем ездит домой?

3. На одном заводе работают три друга: слесарь, токарь и сварщик. Их фамилии: Борисов, Иванов и Семёнов. У слесаря нет ни братьев, ни сестёр, он самый младший из друзей. Семёнов старше токаря и женат на сестре Борисова. Назовите фамилии слесаря, токаря и сварщика.

4. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода, причём вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

5. На даче поселились пятеро мальчиков: Андрюша, Боря, Володя, Гена и Дима. Все были разного возраста: одному был 1 год, другому — 2 года, остальным 3, 4 и 5 лет. Володя был самым маленьким, Диме было столько лет, сколько Андрюше и Гене вместе. Сколько лет Боре? Возраст кого еще из мальчиков можно определить?

6. Племя людоедов поймало Робинзона Крузо. Вождь сказал: «Мы рады бы отпустить тебя, но по нашему закону ты должен сказать какое-нибудь утверждение. Если оно окажется истинным, мы съедим тебя. Если оно окажется ложным, тебя съест наш ручной лев.» Что сказать Робинзону, чтобы людоеды его отпустили?

7. В Стране Чудес проводилось следствие по делу об украденной муке. На суде Мартовский Заяц заявил, что муку украл Болванщик. В свою очередь Болванщик и Соня дали показания, которые по каким-то причинам не были записаны. В ходе судебного заседания выяснилось, что муку украл лишь один из трёх подсудимых и что только он дал правдивые показания. Кто украл муку?

8. На суде каждый из троих подсудимых обвинял одного из двух других. Оказалось, что первый был единственным, кто говорил правду. Если бы каждый стал обвинять другого из них (но не себя), то второй был бы единственным, кто сказал правду. Кто виновен?

9. Как, имея лишь два сосуда ёмкостью 5 и 7 л, налить из крана 6 л воды?

10. В первый сосуд входит 9 л, во второй — 5 л, а в третий — 3 л. Первый сосуд наполнен водой, а остальные два пусты. Как с помощью этих сосудов отмерить 1 л воды? Как отмерить 4 л воды?

11. В бочке находится не менее 13 вёдер бензина. Как отлить из неё 8 вёдер с помощью 9-ведёрной и 5-ведёрной бочек?

12. 12-ведёрная бочка наполнена керосином. Как разлить его на две равные части, пользуясь пятиведёрной и восьмиведёрной бочками?

13. Как взвесить груз на чашечных весах с гирями, если гири правильные, а весы неправильные?

14. Есть четыре камня, разной массы. За какое наименьшее число взвешиваний на весах без гирь можно найти самый тяжёлый и лёгкий камни?

15. Докажите что, среди любых $n+1$ натуральных чисел найдутся хотя бы два числа, которые при делении на n дают одинаковые остатки.

16. Докажите, что среди любых $n+1$ натуральных чисел найдутся два числа таких, что их разность делится на n.

17. Доказать, что из любых трёх целых чисел можно найти два, сумма которых чётна.

18. Можно ли 25 рублей разменять десятью купюрами по 1, 3 и 5 рублей?

19. Даны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавлять 1. Можно ли все числа сделать равными?

20. На столе семь перевёрнутых стаканов. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

21. На чудо-яблоне растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет ещё один ананас, а если сорвать банан и ананас, то вырастет банан. В итоге остался один плод. Какой это плод, если неизвестно, сколько бананов и ананасов росло вначале?

22. Иван-царевич имеет два волшебных меча, один из которых может отрубить Змею Горынычу 21 голову, а второй — 4 головы, но тогда у Змея Горыныча отрастает 2020 голов. (Однако если, например, у Змея Горыныча осталось лишь 3 головы, то рубить их ни тем, ни другим мечом нельзя.) Может ли Иван отрубить Змею Горынычу все головы, если в самом начале у него было 100 голов?

23. За один ход число, написанное на доске, разрешается либо заменить на удвоенное, либо стереть у него последнюю цифру. Вначале на доске написано число 456. Можно ли из него получить число 14?

24. Двое играют в следующую игру. Имеется три кучки камней: в первой — 10, во второй — 15, в третьей — 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет?

25. Двое по очереди ломают шоколадку 6 х 8. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре, тот, кто делает первый ход, или второй?

26. На доске написаны 10 единиц и 10 двоек. За ход можно стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать 2, а если разными — 1. Если последняя оставшаяся на доске цифра — 1, то выиграл первый игрок, если 2 — то второй. Кто при правильной игре выиграет?

27. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били Друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков выиграет?

28. Двое игроков по очереди расставляют между числами от 1 до 20, выписанными в строчку, «+» и «−». После того. как все места заполнены считается результат. Если он чётен, то выигрывает первый игрок, если нечётен, то — второй. Кто из игроков выиграет?

29. В строчку написаны 10 единиц. Лёша и Витя по очереди ставят между какими-нибудь соседними числами знак: «+» или «−». Когда между всеми соседними числами поставлен какой-нибудь знак, вычисляется результат. Если полученное число чётное, то выигрывает Лёша, а если нечётное, то — Витя. Кто из ребят выиграл?

30. Вася и Петя выписывают 12-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Докажите, что какие 6ы цифры он не писал, Петя всегда сможет добиться, чтобы получившееся число делилось на 4.

31. Двое выписывают шестизначное число, выставляя по очереди по одной цифре, начиная со старшего разряда. Если получившееся число разделится нацело на 7, то выигрывает сделавший последний ход, иначе — начинающий. Кто выиграет в такой игре?

32. Докажите, что произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.

33. Докажите, что произведение любых пяти последовательных чисел делится на 30.

34. Коля и Петя купили одинаковые беговые лыжи. Сколько стоит одна пара лыж, если Петя уплатил стоимость лыж трёхрублёвыми купюрами, Коля — пятирублёвыми, а всего они дали в кассу меньше 10 купюр?

35. Найти такие четыре натуральных числа, что произведение любых трёх из них, сложенное с единицей, делится на четвёртое.

36. Чтобы узнать, является ли число 1601 простым, его стали последовательно делить на 2, 3, 5 и т. д. На каком простом числе можно прекратить испытания?

37. Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причём одинаковые цифры — на одинаковые буквы, а разные — на разные. В итоге у него получилось $АБ \cdot ВГ = ДДЕЕ$. Докажите, что он где-то ошибся.

38. Сколько имеется четырёхзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них 97?

39. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

40. Найти наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все 10 цифр.

41. Тренер купил несколько мячей, скакалок, обручей и заплатил за все покупки 1690 рублей. Скакалка стоит 260 рублей, обруч — 130 рублей, мяч — 100 рублей. Сколько мячей, скакалок и обручей купил тренер? Ответ поясните.

42. Тренер купил несколько мячей, скакалок, обручей и заплатил за все покупки 1540 рублей. Скакалка стоит 330 рублей, обруч — 220 рублей, мяч — 90 рублей. Сколько мячей, скакалок и обручей купил тренер? Ответ поясните.

43. В мешке находятся 29 белых перчаток и 31 чёрная перчатка. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней? Запишите решение и ответ.